1. Grundbegriffe

1.1 Elementare Aussagenlogik

Eine Aussage ist ein sprachlich sinnvoller Satz, der einen Tatbestand ausdrückt, der entweder wahr oder falsch ist.

- Grün: Definition
- Rot: Aussage gemacht
- Rot unterstrichen: Eigenschaft
- „:=“ ist eine Definition
- „p:=“ liest man „per Definition gleich

Bsp.:

- p:= „2 mal 2 ist vier“
- q := „10 ist durch 3 teilbar“ (falsch, aber es wird ein Tatbestand ausgedrückt)
- r := „Alle Menschen sind sterblich“

Für obiges Beispiel.: $|p| = 1, |q| = 0, |r| = 1$

Unzulässig:

- „Wie spät ist es?“ (Als Aussage unzulässig; allg. Frage-, Wunsch- und Befehlssätze)

[...]

Definition von elementaren Aussageverbindungen	Name	Symbol
nicht p	Negation	$\neg p$
p und q	Konjunktion	$p \wedge q$
p oder q	Disjunktion	$p \vee q$
wenn p wahr, dann q wahr	Implikation	$\vert p\vert=1 \Rightarrow \vert q\vert=1$ ** Richtig?*
p ist wahr genau dann wenn q wahr ist	Äquivalenz	** Weiß nicht...*

Aussageverbindungen entstehen durch Verneinung oder Verknüpfung von Aussagen mit Funktoren ...

Eine AV ist wieder eine Aussage, die wahr oder falsch ist gemäß folgender Wahrheitstabelle.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Inhalt dieser Tabelle wird bestimmt im Teilfeld "Prädikatenlogik" der Mathematik.

Bsp.: $-1=1 \Rightarrow (-1)^2=(1)^2$
$\Rightarrow 1=1$

Bsp.: $-2=2 \Rightarrow -4=4$

Lesebeispiele:

1. Wenn $|p|=1$, dann sei $|\overline{p}|=0$
2. Wenn $|p|=1\, und\, |q|=0, dann\, sei\, |p \wedge q|=0, bzw. |p \vee q|=1$
3. Wenn $|p|=0$ und $|q|=1$, dann $|p \Rightarrow q|=1$

Bemerkung: Die Implikation ist nur dann falsch,
wenn die Prämisse p wahr ist und die Konklusion q falsch ist.

Bsp.:

- p := "3 ist eine Primzahl", $|p|$ = *1*
- q: = "10 ist durch 3 teilbar", $|q|$ = *0*
- r := "4 ist eine Primzahl", $|r|$ = *0*
- $\overline{p}=3 \text{ ist keine Primzahl}, |\overline{p}|=0$
- $p \wedge q = ... |p \wedge q|=0$
- $p \vee q = ... |p \vee q|=1$

Eine n-stellige AV $a(p1\, p2, ..., p_n), (n \geqslant 2)$ ist durch Verknüpfung von n Aussagen $p_1, p_2, ..., p_n$ mittels Funktoren definiert.

[...]

Bsp. 1: $(p \vee q) \Rightarrow r$ (3-stellige AV)

p	**q**	**r**	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

Bemerkung: Bei n-stelligen AV gibt es 2^n Kombinationen der Wertebelegungen.

Bsp. 2: $((p \vee q) \vee \overline{p}) \Rightarrow q$

p	**q**	$p \vee q$	$\overline{p}$	$(p \vee q) \wedge \overline{p}$	$((p \vee q) \wedge \overline{p}) \Rightarrow q$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Was ist ein Beispiel einer stets wahren Aussagenver-bindungen ("Tautologie") - aussagenlogisches Gesetz?

Bsp. 3: $p \vee \overline{p}$ ist eine stets falsche AV ("Kontradiktion"):

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
0	1	0
1	0	0

Man sucht stets nach Tautologien, da sie für mathematische Beweise nützlich sind.

Aussagenlogische Gesetze (Anwendung bei Beweisführung):

(1) $|p \vee \overline{p}| = 1$ *Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten*

(2) $|p \vee \overline{q}| = 0$ *Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch*

(3) $\overline{\overline{p}} \Rightarrow p$ *Gesetz von der Negation der Negation*

(4a) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$

(4b) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ *Gesetze von De Morgan*

(5) $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \vee \overline{q}$

(6) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ *Kontraposition für indirekten Beweis*

Typische mathematische Sätze: " $p \Rightarrow q$ *ist wahr* "

Direkter Beweis: Wir nehmen an, dass *p* wahr ist, daher ist auch [irgendwas anderes] wahr, und dann ist [auch irgendwas anderes] wahr, schließlich ist *q* wahr. Wenn *p* als wahr angenommen wird.

Indirekter Beweis: Wir nehmen an, dass $\overline{q}$ wahr ist, daher ist auch [irgendwas anderes] war und dann ist [wieder was anderes] wahr, und schließlich ist $\overline{p}$ wahr.

Nach (6) ist dann $p \Rightarrow q$ wahr.

Es fehlen jetzt noch Quantoren ("für alle natürlichen Zahlen gilt...") - das kommt nächstes Mal!